ediciones sm

Tasas de variación y derivadas

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

2. La recta tangente a la curva $f(x) = 4x^2 - x$ en un determinado punto tiene de pendiente 7. Halla el punto de tangencia.

3. ¿En qué punto son paralelas la recta de ecuación $x - y = 0$ y la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - x$?

4. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ es paralela al eje OX?

5. El crecimiento, en centímetros, de una planta durante sus primeros ocho días de vida viene dado por la función $f(x) = 3^{x-8}$, que indica la medida de la planta transcurridos x días desde su nacimiento.

a) ¿Cuánto mide la planta finalizado el cuarto día? ¿Y si ha finalizado el octavo día?
b) ¿Cuál fue la tasa de crecimiento en esos cuatro días?
c) ¿Cuál fue la tasa media de crecimiento en ese período?
d) ¿Crees que la función dada puede representar el crecimiento de la planta a lo largo de toda su vida? Razona la respuesta.

6. La población activa de un país es el conjunto de personas que trabajan (ocupados) y aquellas que buscan trabajo (parados). La tabla muestra la evolución de la población activa en España, en miles de personas, en los años que se indican:

Año	1993	1994	1995	1996	1997
Ocupados	13 878,8	11 730,0	12 142,7	12 543,6	12 914,6
Parados	3 573,4	3 738,2	3 579,4	3 491,8	3 292,6
Total (activos)					
Tasa de paro (%)					

a) Halla la población activa en cada año y completa las casillas correspondientes de la tabla.
b) ¿Cuál fue la variación de la población activa entre 1993 y 1994? ¿Y entre 1993 y 1997?
c) ¿Cuál fue la variación media de la población activa entre 1993 y 1997?
d) Se llama tasa de paro anual, medida en tanto por uno, a la relación entre el número de parados y el de activos de cada año. Halla la tasa de paro correspondiente a cada uno de los años reflejados en la tabla y exprésala en tanto por ciento.
e) ¿Cuál fue el peor año para el empleo durante el período 1993-1997? ¿Cuál fue el mejor?
f) ¿Cuál fue la variación de la tasa media de paro entre 1993 y 1997?

7. El espacio que recorre un coche en los primeros diez minutos desde que sale de un garaje hasta que entra en una autopista sigue la ecuación $e(t) = \frac{t^2}{12}$, donde el tiempo viene dado en minutos y el espacio en kilómetros.

a) ¿Cuál es la velocidad media del coche en estos diez minutos?
b) ¿A qué velocidad circula en el momento en que entra en la autopista? Exprésala en km/h.
c) Un día el conductor recibe una multa porque, según el radar de la policía, en el minuto ocho rebasó el límite de 70 km/h existente en el lugar por el que pasaba. ¿Puede recurrir la multa?

8. Considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Calcula $f'(0)$ y $f'(3)$.

SOLUCIONES

1. La ecuación de la recta tangente es:

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Solución: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow$

$4y - 2 = -x + 2 \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$

2. La pendiente de la recta tangente en el punto es la derivada de la función en dicho punto.

$f'(x) = 8x - 1 = 7 \Leftrightarrow x = 1$

Solución: El punto es $P(1, f(1)) = (1, 3)$.

3. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

La recta $x - y = 0$ tiene pendiente $y = 1$, y la recta tangente a la curva $y = f(x) = 2x^2 - x$ tiene como pendiente en un punto la derivada de la función en el punto, es decir, $y' = 4x - 1$.

$4x - 1 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Solución: El punto es $P\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

4. En el punto buscado, la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$ tiene la misma pendiente que el eje OX, es decir:

$y' = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Solución: El punto es: $P(-1, f(-1)) = P(-1, -2)$. Nótese que se trata del vértice de la parábola.

5. a) $f(4) = 3^{-4} = 0{,}012$ cm
$f(8) = 3^0 = 1$ cm

b) La tasa de crecimiento fue: $f(8) - f(4) = 0{,}988$ cm

c) $TVM[4, 8] = \dfrac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \dfrac{0{,}988}{4} = 0{,}247$ cm/día

d) No. Supondría que la planta crece indefinidamente, pues $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y este comportamiento no es propio de los seres vivos.

Éste es un ejemplo claro de la importancia que tiene restringir el dominio de una función.

6. a) y d)
tasa de paro $= \dfrac{\text{población parada}}{\text{población activa}}$ en tanto por uno

Año	1993	1994	1995	1996	1997
Ocupados	13 878,8	11 730,0	12 142,7	12 543,6	12 914,6
Parados	3 573,4	3 738,2	3 579,4	3 491,8	3 292,6
Total (activos)	17 452,2	15 468,2	15 722,1	16 035,4	16 207,2
Tasa de paro (%)	20,5	24,2	22,8	21,8	20,3

b) Activos (1994) − Activos (1993) = −1 984. Entre 1993 y 1994 la población activa disminuyó en 1 984 000 personas.

Activos (1997) − Activos (1993) = −1 245. Entre 1993 y 1997 la población activa disminuyó en 1 245 000 personas.

c) $TVM\ [1993, 1997] = \dfrac{f(1997) - f(1993)}{1997 - 1993} =$

$= \dfrac{1\,245}{4} = 311{,}25$ miles de personas/año

e) El año 1994 fue el peor, pues tuvo la tasa de paro más alta. La menor tasa de paro se alcanzó en 1997; por tanto, fue el mejor año para el empleo.

f) Al restar a la tasa de paro de 1997 la de 1993 se obtiene −0,02, que es la variación pedida.

7. a) $v_m = \dfrac{e(10) - e(0)}{10 - 0} = \dfrac{5}{6}$ km/minuto = 50 km/h

b) $e'(t) = \dfrac{t}{6} \Rightarrow e'(10) = \dfrac{10}{6}$ km/minuto = 100 km/h

c) En el minuto 8 iba a $e'(8) = 4/3$ km/m = = 80 km/h; por tanto, la multa estaba justificada.

8. Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son polinomios y por tanto se pueden calcular sus funciones derivadas sin necesidad de utilizar la definición (el único punto en el que habría que recurrir a la definición es el punto $x = 2$).

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: $f'(0) = 2$ y $f'(3) = 6$.